

Physikalisches Praktikum für Vorgerückte

# Der Schroteffekt

Mattia Rigotti

8. Februar 2004

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Der Schwingkreis mit der Röhrendiode . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Experiment</b>	<b>5</b>
3.1	Versuchsaufbau . . . . .	5
3.2	Messungen . . . . .	7
3.3	Auswertung . . . . .	8
3.4	Fehlerrechnung . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Antworten zu den Fragen der Anleitung</b>	<b>11</b>

# 1 Einleitung

Der Schrotheffekt ermöglicht uns, die Elementarladung  $e$  auf eine indirekte Weise zu bestimmen, die nicht den Ungenauigkeiten unterliegt, die bei einer direkten Messung erscheinen würden.

Zu diesem Zweck benutzt man eine im Sättigungsgebiet arbeitende Röhrendiode, in der Elektronen durch Heizung der Kathode zum Austritt gebracht werden. Eine zwischen Kathode und Anode angelegte Spannung beschleunigt die Elektronen auf die Anode. Der damit verursachte Spannungsimpuls ist aber nicht direkt messbar.

Um diesen kurze Puls zu messen, wird er mit Hilfe eines Schwingkreises in eine messbare Anodenstromschwankung umgewandelt. Diese Schwankung kann nach ausreichender Verstärkung gemessen werden, und damit kann die Elementarladung bestimmt werden.

## 2 Theorie

### 2.1 Der Schwingkreis mit der Röhrendiode

Abbildung 1 zeigt schematisch den Aufbau des Schwingkreises mit der Röhrendiode  $D$ . Dieser Schwingkreis besteht ausserdem aus einer Parallelanordnung einer Kapazität  $C$ , einer Selbstinduktion  $L$  mit Seriewiderstand  $R_{LS}$  und einem Widerstand  $R$ .

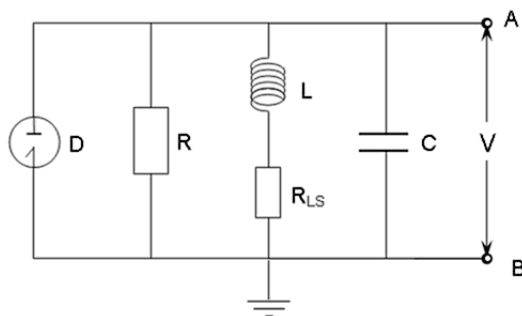


Abbildung 1: *Schema eines Schwingkreises mit Röhrendiode*

Die Differentialgleichung eines solchen Schwingkreises lautet:

$$\ddot{U}LC + \dot{U} \left( \frac{L}{R} + R_{LS}C \right) + U \left( 1 + \frac{R_{LS}}{C} \right) = 0. \quad (1)$$

Wird ein Elektron zur Zeit  $t = 0$  die Anode erreichen, so es verursacht einen Spannungsstoss:

$$U(t) = A e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \delta) \quad (2)$$

mit

$$\tau = \frac{2LC}{\frac{L}{R} + CR_{LS}}, \quad (3)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \frac{R_{LS}}{R}}{LC} - \frac{(\frac{L}{R} + CR_{LS})^2}{4L^2C^2}}, \quad (4)$$

$$A \cos \delta = \frac{e}{C}, \quad (5)$$

$$A \sin \delta = -\frac{e}{\omega C} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC} \right). \quad (6)$$

Da mehrere Elektronen ( $n \cdot e = I$ , wobei  $I = \text{Strom}$ ) die Anode erreichen, setzt sich die Spannung  $V$  aus der Summe aller verschiedenen Zeiten einsetzenden Spannungsstößen  $U(t)$  zusammen. Da diese Stöße statistisch unkorreliert sind, können wir dank dem *Theorem von Campbell* das mittlere Schwankungsquadrat von  $V$  mit dem Integralausdruck

$$\overline{\Delta V^2} = n \int_0^\infty dt U(t) \quad (7)$$

berechnen.

Wenn wir Schwingkreise mit schwacher Dämpfung, d.h. mit  $\omega\tau \ll 1$  betrachten, dann erhält man nach Einsetzen von (1) in (7):

$$\overline{\Delta V^2} = \frac{I \cdot e}{2C} R_0, \quad (8)$$

wobei  $R_0$  dem effektiven Parallelwiderstand des Schwingkreises entspricht:

$$R_0 = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{L}{CR_{LS}}} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Durch Messung von  $I$ ,  $C$ ,  $R_0$  und  $\overline{\Delta V^2}$  kann also die Elementarladung  $e$  bestimmt werden.

## 3 Experiment

### 3.1 Versuchsaufbau

Das Kernstück ist ein Schwingkreis mit Röhrendiode. Die Anodenspannung wird konstant auf  $150V$  gehalten. Durch Ändern der Heizleistung wird der Anodenstrom  $I$  variiert.

#### Messung der Gesamtkapazität $C$

Um die Gesamtkapazität  $C$  zu bestimmen schaltet man zwischen  $A$  und  $B$  (s. Abb. 2) eine bekannte Kapazität  $C_1$  parallel zum Schwingkreis und man bestimmt die Resonanzfrequenz  $\omega_1$  des modifizierten Schwingkreises. Sollten wir dieses Verfahren mit einer zweiten bekannten Kapazität  $C_2$  wiederholen, dann könnte man die Kapazität  $C$  des Schwingkreises aus der Formel

$$C = \frac{\omega_1^2 C_1 - \omega_2^2 C_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (10)$$

bestimmen. Die Messung kann vereinfacht werden, indem man  $C_2 = 0$  setzt. Die Frequenz  $\omega_2$  wird dann die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  des Schwingkreises allein sein.

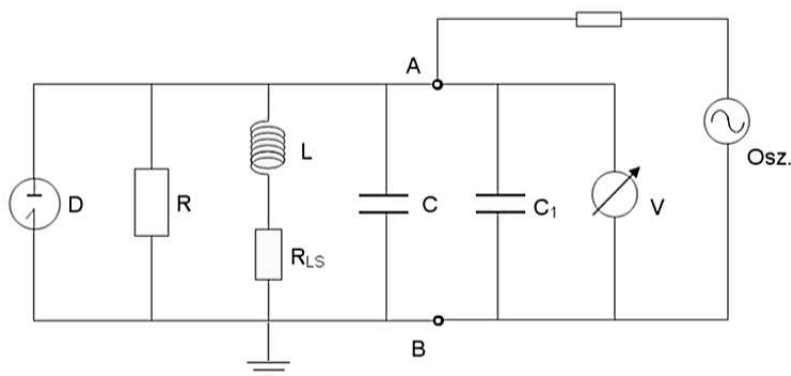


Abbildung 2: Aufbau zur Bestimmung der Gesamtkapazität  $C$

### Messung des effektiven Widerstandes $R_0$

Man kann den Gesamtwiderstand  $R_0$  messen, indem man die Spannungen  $U_1$  am Punkt  $A$  und  $U_2$  am Punkt  $B$  gleichzeitig bestimmt, wenn der Schwingkreis angeregt wird (s. Abb. 3). Für einen bekannten  $\rho$  ist dann  $R_0$  gegeben durch:

$$R_0 = \frac{U_2}{U_1 - U_2} \rho. \quad (11)$$

Die GröÙe  $\rho$  kann mit einer Messbrücke gemessen werden. Man wiederholt die Messung von  $R_0$  für alle Diodenströme. Dabei muss man beachten, dass der Oszillator auf die Resonanzfrequenz eingestellt werden muss.

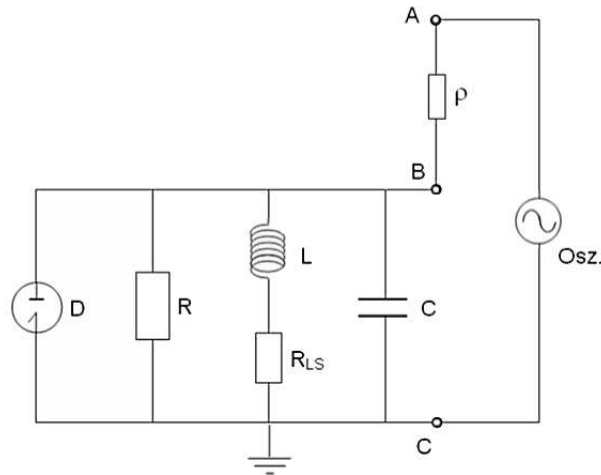


Abbildung 3: Aufbau zur Bestimmung des effektiven Widerstandes  $R_0$

### Messung des Spannungsschwankungs-Quadrat $\overline{\Delta V^2}$

Um das Schwankungsquadrat zu bestimmen, wird das Signal zuerst zwei mal nacheinander verstärkt. Schliesslich quadriert ein Multiplikator das Signal. Man muss beachten, dass man nach jedem dieser Schritte ein modifiziertes Signal in unbekanntem Einheiten erhält: das Verstärkungsfaktor  $a$  des Verstärkers ist nämlich nicht exakt bekannt und das Multiplikator ergibt das Produkt der Eingangsspannungen multipliziert mit einer unbekanntem Konstante  $k$ .

Um diese zwei unbekanntem Konstanten zu bestimmen, greifen wir zu einem sinusförmigen Referenzsignal, welches uns der Hochfrequenzoszillator liefert.

## 3.2 Messungen

### Die Gesamtkapazität $C$

Die Referenzfrequenz für das System ohne die Zusatzkapazität betrug:

$$\omega_0 = 279 \pm 1 \text{ kHz.}$$

Mit der Zusatzkapazität  $C_1 = 5369 \pm 7 \text{ pF}$  erhält man die Frequenz

$$\omega_1 = 122 \pm 1 \text{ kHz.}$$

Mit Formel (10) ist somit die Gesamtkapazität  $C = \frac{\omega_1^2 C_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$ , also

$$C = 1268 \pm 28 \text{ pF.}$$

### Der Widerstand $\rho$

Dank Messbrücke erhält man für  $\rho$  den Wert:

$$\rho = 32.5 \pm 0.5 \text{ k}\Omega.$$

### Der Widerstand $R_0$

$I$  sei der Anodenstrom,  $U_1$  sei der Spannungsabfall über  $\rho$  und  $R_0$ ,  $U_2$  derjenige nur über  $R_0$ . Die Resonanzfrequenz für  $U_2$  betrug neu 279 kHz. Mit der Formel 11:

$$R_0 = \frac{U_2}{U_1 - U_2} \rho$$

ergibt sich

$I[\text{mA}]$ ( $\pm 1 \text{ mA}$ )	$U_1[\text{V}]$ ( $\pm 0.05 \text{ V}$ )	$U_2[\text{V}]$ ( $\pm 0.05 \text{ V}$ )	$R_0[\text{k}\Omega]$
25	3.00	1.15	$20.2 \pm 1.6$
20	3.00	1.25	$23.2 \pm 1.8$
15	3.00	1.35	$26.6 \pm 2.0$
10	3.00	1.40	$28.4 \pm 2.1$
5	3.00	1.50	$32.5 \pm 2.5$

### Der Schwankungsquadrat $\overline{\Delta V^2}$

Mit  $A$  bezeichnen wir den Ausschlag bei der Anzeige des Multiplikators.  $V$  ist die Amplitude des sinusförmigen Referenzsignals, das einem Ausschlag  $A$  entspricht.  $\overline{\Delta V^2}$  ist das Schwankungsquadrat, das aus einem Sinussignal mit Amplitude  $V$  berechnet wird ( $\overline{\Delta V^2} = |V|^2$ ).

$I[mA]$ ( $\pm 1 mA$ )	$A$ ( $\pm 1$ )	$V[mV]$ ( $\pm 0.02 mV$ )	$\overline{\Delta V^2}[10^{-8} V^2]$
25	49	0.16	$2.6 \pm 0.6$
20	45	0.16	$2.6 \pm 0.6$
15	39	0.14	$2.0 \pm 0.6$
10	30	0.12	$1.4 \pm 0.5$
5	16	0.10	$1.0 \pm 0.4$

### 3.3 Auswertung

Jetzt können unsere Resultate zusammenfassen und die Elementarladung mit der Formel (8) berechnen:

$$e = \frac{\overline{\Delta V^2} \cdot 2C}{I \cdot R_0}.$$

Wir erhalten also:

$I[mA]$ ( $\pm 1 mA$ )	$C[pF]$ ( $\pm 28$ )	$R_0[k\Omega]$	$\overline{\Delta V^2}[10^{-8} V^2]$	$e[10^{-19} C]$
25	1268	$20.2 \pm 1.6$	$2.6 \pm 0.6$	$1.3 \pm 0.3$
20	1268	$23.2 \pm 1.8$	$2.6 \pm 0.6$	$1.4 \pm 0.4$
15	1268	$26.6 \pm 2.0$	$2.0 \pm 0.6$	$1.3 \pm 0.4$
10	1268	$28.4 \pm 2.1$	$1.4 \pm 0.5$	$1.3 \pm 0.5$
5	1268	$32.5 \pm 2.5$	$1.0 \pm 0.4$	$1.6 \pm 0.7$

Für die Elementarladung  $e$  haben wir also einen Mittelwert von  $\bar{e} = 1.4 \cdot 10^{-19} C$  gefunden. Dieser stimmt mit dem anerkannten Wert von  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$  innerhalb der Fehlerschranke von  $\Delta e = 0.4 \cdot 10^{-19} C$  genügend gut überein.



### 3.4 Fehlerrechnung

Wir berechnen den Fehler mit der Methode der Schwankungsquadrate:

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}.$$

**Fehler in  $C$**

$$C = \frac{\omega_1^2 C_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

$$\Delta C = \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \Delta C_1\right)^2 + \left(\left(\frac{2\omega_1 C_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2} + \frac{2\omega_1^3 C_1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2}\right) \Delta \omega_1\right)^2 + \left(\frac{2\omega_0 \omega_1^2 C_1}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2} \Delta \omega_0\right)^2}.$$

Gemäss unserer Messungen haben wir:

$$\omega_0 = 279 \pm 1 \text{ kHz}, \quad C_1 = 5365 \pm 7 \text{ pF}, \quad \omega_1 = 122 \pm 1 \text{ kHz}.$$

Dies ergibt uns:

$$\Delta C = 28 \text{ pF}.$$

**Fehler in  $R_0$**

$$R_0 = \frac{U_2}{U_1 - U_2} \rho$$

$$\Delta R_0 = \sqrt{\left(\frac{U_2}{U_1 - U_2} \Delta \rho\right)^2 + \left(\frac{-U_2 \rho}{(U_1 - U_2)^2} \Delta U_1\right)^2 + \left(\frac{U_1 \rho}{(U_1 - U_2)^2} \Delta U_2\right)^2}.$$

Gemäss unserer Messungen haben wir z.B. bei  $I = 5 \text{ mA}$ :

$$U_1 = 3.00 \pm 0.05 \text{ V}, \quad U_2 = 1.50 \pm 0.05 \text{ V}, \quad \rho = 32.5 \pm 0.5 \text{ k}\Omega.$$

Dies ergibt uns:

$$\Delta R_0 = 2.5 \text{ k}\Omega.$$

### Fehler in der Elementarladung $e$

$$e = \frac{\overline{\Delta V^2} \cdot 2C}{I \cdot R_0}.$$

$$\Delta e = \sqrt{\left(\frac{2C}{I \cdot R_0} \Delta(\overline{\Delta V^2})\right)^2 + \left(\frac{2\overline{\Delta V^2}}{I \cdot R_0} \Delta C\right)^2 + \left(\frac{\overline{\Delta V^2} \cdot 2C}{I^2 \cdot R_0} \Delta I\right)^2 + \left(\frac{\overline{\Delta V^2} \cdot 2C}{I \cdot R_0^2} \Delta R_0\right)^2}.$$

Gemäss unserer Messungen haben wir z.B bei  $I = 5 \text{ mA}$ :

$$C = 1268 \pm 28 \text{ pF}, \quad R_0 = 32.5 \pm 2.5 \text{ k}\Omega, \quad \overline{\Delta V^2} = (1.0 \pm 0.4) \cdot 10^{-8} \text{ V}^2.$$

Dies ergibt uns:

$$\Delta e = 0.7 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

## 4 Antworten zu den Fragen der Anleitung

- a) **Alternative Methoden** Mit *Millikan-Versuch* bestimmt man die Elementarladung aus einer Gleichgewichtsgleichung für Kraft, die auf einem Öltröpfchen wirken, falls dieses sich in einem elektrischen Feld befindet. Hier spielen aber Reibung und Viskosität eine wichtige Rolle.

Ein *Massenspektrometer* gibt uns Information über das Verhältnis  $\frac{e}{m_e}$ ; die Elementarladung kann dann bestimmt werden, wenn die Masse des Elektrons  $m_e$  bekannt ist.

Mit Hilfe des *Photoeffekts* kann man das Verhältnis  $\frac{h}{e}$  bestimmt werden (dies entspricht die Steigung der Gerade  $U(\nu)$ ). Die Elementarladung kann somit erst bestimmt werden wenn  $h$  bekannt ist.

- b) **Abschätzung der Elektronen-Flugzeit** Die verwendete Abschätzung gilt nur, wenn die Flugzeit  $t_F$  der Elektronen gegenüber der Periode der Schwingung vernachlässigbar klein ist, d.h.  $t_F \ll T$ . In der verwendeten Röhrendiode beträgt der Abstand zwischen Kathode und Anode  $d=1$  cm, die Beschleunigungsspannung ist  $U=150$  V, die Resonanzfrequenz des Systems liegt bei ca. 290 kHz. Mit Hilfe des Newton'schen Kraftgesetzes ( $F = m \cdot a$ ) folgt:

$$t_F = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2md^2}{Ue}} = 2.75 \cdot 10^{-9} \text{ s}, \quad T = \nu^{-1} \cong 3.45 \cdot 10^{-6} \text{ s}. \quad (12)$$

Die Elektronen-Flugzeit ist also gegenüber der Schwingungsperiode um etwa ein Tausendstel kleiner und somit vernachlässigbar.

- c) **Diodenkennlinie** Bei tiefer Anodenspannung steigt die Kennlinie der Röhrendiode zuerst stark nicht-linear an. Bei höherer Anodenspannung flacht die Kennlinie wieder ab (Übergang in den Sättigungsbereich) und steigt dann nur noch langsam und fast linear. Bei höheren Filamenttemperaturen (also höherem Heizstrom) ist auch der Sättigungsstrom höher.
- d) **Einstellung des Diodenstromes** Je grösser der Strom  $I$  ist, desto mehr Elektronen kommen zur Anode. Die Röhrendiode wirkt dann als ein kleineren Widerstand, und trägt somit in verschiedene Weise zum effektiven Widerstand  $R_0$  bei. Wegen der Parallelschaltung muss es gelten:

$$I \text{ grösser} \quad \rightarrow \quad R_{\text{Diode}} \text{ kleiner} \quad \rightarrow \quad R_0 = \left( \frac{1}{R_{\text{rest}}} + \frac{1}{R_{\text{Diode}}} \right)^{-1}.$$

Das wird auch tatsächlich im Experiment nachgewiesen.

e) **Schwingkreis als Anodenimpedanz** Da ein einzelner Elektronen-Ladungsübertritt einen für eine Messung zu kleinen Strompuls erzeugt, wird er dadurch sichtbar gemacht, indem als Anodenimpedanz ein Schwingkreis verwendet wird, dessen Anregung durch übertretende Elektronen länger sichtbar bleibt.

f) **Skinneffekt** Die Skinlänge  $\delta$  (Penetrationslänge) ist für höhere Frequenzen kleiner:  $\delta \sim \text{sqr}t \frac{1}{\omega}$ . Dann wird der Widerstand umso grösser, je mehr sich die Frequenz erhöht, denn es gilt für einen kreisförmigen Leiter (Rohr der Dicke  $\delta$ ):

$$\begin{aligned} \text{Querschnittsfläche } A &= (r_{\text{ausser}}^2 - r_{\text{inner}}^2) \pi = (r_{\text{ausser}}^2 - (r_{\text{ausser}} - \delta)^2) \pi \\ &\cong 2r_{\text{ausser}}\delta\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Widerstand } R = \rho \frac{l}{A} \propto \frac{1}{\delta} \propto \sqrt{\omega}.$$

g) **Verluste** Bei Spulen ist es geeignet, mit *kleinerer Frequenz* zu arbeiten. Die Kondensatoren sollen mit einem möglichst *guten Dielektrikum* gefüllt sein.